

**Министерство образования и науки РФ
Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада
2015-2016**

МАТЕМАТИКА

11 класс

**II этап
Вариант 2**

1. Два трактора вместе вспахивают поле за 4 дня. Если первый трактор проработает 3 дня, а затем второй – 5 дней, то будет вспахано 95% этого поля. За сколько дней может вспахать поле один второй трактор?

(7 баллов)

Ответ: 10 дней.

2. Решить уравнение $\frac{\sqrt{x^2 - 6x - 7}}{x - 7} = \frac{x + 1}{3}$.

(8 баллов)

Ответ: $-2; -1; 8$.

3. Решить уравнение $\sqrt{-9 \cos 2x - 19 \cos x} = -2\sqrt{3} \sin x$.

(10 баллов)

Ответ: $\pi + \arccos \frac{1}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

4. Решить неравенство $2 + \log_{1-2x} \frac{1}{1-5x^2} \geq 0$.

(10 баллов)

Ответ: $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{1}{3}\right) \cup \left\{\frac{2}{5}\right\}$

5. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами AB и CD , длины которых равны 10, из вершин B и D к диагонали AC проведены перпендикуляры BH и DK . Известно, что основания перпендикуляров лежат на отрезке AC и $AH:AK:AC = 5:14:15$. Найти площадь трапеции $ABCD$.

(10 баллов)

Решение. Обозначим $x = BH$, $y = DK$. Из подобия прямоугольных треугольников DKA и BHC , так как $\angle BCH = \angle DAK$ получаем

$$\frac{x}{y} = \frac{CH}{AK} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}, 5y = 7x, y = \frac{7x}{5}.$$

По условию $AH:AK:AC = 5:14:15$, поэтому $AH:CK = 5:1$. По теореме Пифагора

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 100 - x^2, CK^2 = CD^2 - DK^2 = 100 - y^2.$$

Следовательно, $\frac{25}{1} = \frac{AH^2}{CK^2} = \frac{100 - x^2}{100 - y^2}$. Так как $y = \frac{7x}{5}$, то, подставляя y в последнее уравнение, на-

ходим, что $x = \sqrt{50}$, $y = \frac{7\sqrt{50}}{5}$, $AH = \sqrt{50}$, $AC = 3\sqrt{50}$,

$$S_{ABCD} = AC \cdot (DK + BH) / 2 = AC \cdot (x + y) / 2 = 180.$$

Ответ: 180.

6. Может ли число $(x^2 + x + 3)^2 + (y^2 + y + 3)^2$ при каких-то целых x и y оказаться точным квадратом?

(15 баллов)

Решение. Так как $x^2 + x + 3 = x(x + 1) + 3$, то при любых целых x и y значение каждого из выражений в скобках — нечетное число. Квадрат нечетного числа при делении на 4 дает в остатке 1, поскольку $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n + 1) + 1$. Таким образом, значение данного выражения является четным числом и при делении на 4 дает остаток 2.

Пусть оно является точным квадратом, тогда это квадрат четного числа. Но квадрат любого четного числа делится на 4 — противоречие.

Ответ: Нет, не может.

Ответ:

Внимание! Задача считается решенной, если, помимо правильного ответа, приведены необходимые объяснения.

Желаем успеха!